A.G. KUROSH

ECUACIONES ALGEBRAICAS DE GRADOS ARBITRARIOS

ALEKSANDR GENNADYEVICH KUROSH

ECUACIONES ALGEBRAICAS DE GRADOS ARBITRARIOS

PREFACIO

Este librito ha sido escrito a base de las clases que el autor dictara en la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú para los participantes de la olimpíada matemática, alumnos del noveno y décimo grados. En el mismo se traza, de acuerdo con el nivel de conocimientos de un alumno del noveno grado, un resumen de los resultados y métodos de la teoría general de las ecuaciones algebraicas. Prácticamente no se presentan demostraciones ya que para ello hubiera sido necesario transcribir casi la mitad del manual de álgebra superior para la universidad. Pero incluso tal condición no hace que la lectura de este librito se convierta en un ligero pasatiempo, ya que toda literatura matemática y entre ella la de popularización exige del lector una gran atención, el razonamiento de todas las definiciones y enunciados, la comprobación de los cálculos en todos los ejemplos y la aplicación de los métodos examinados a otros casos, propuestos por el mismo lector, etc.

CONTENIDO

§ 1. INTRODUCCIÓN

El curso escolar de álgebra contiene un variado material, sin embargo, su centro lo constituye la resolución de ecuaciones. Limitándonos a las ecuaciones con una sola incógnita, recordemos lo poco que sobre ellas se da en la escuela media.

Todo alumno es, antes que nada, capaz de resolver ecuaciones de primer grado: sea dada la ecuación

$$ax+b=0,$$

donde $a\neq 0$, entonces su única raíz será el número

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Además, el alumno conoce la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0,$$

donde $a\neq 0$. Precisamente

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si los coeficientes de la ecuación son números reales, esta fórmula da dos raíces reales diferentes en el caso cuando el subradical es un número positivo, es decir, cuando $b^2-4ac>0$. Por el contrario, si $b^2-4ac=0$, nuestra ecuación sólo posee una raíz, a la que se denomina, en este caso, raíz *múltiple*; si $b^2-4ac<0$ la ecuación no posee ninguna raíz real.

El alumno puede resolver, por último, algunos tipos de ecuaciones de *tercero* y *cuarto* grados, más exactamente, aquellas cuya resolución se reduce fácilmente a la resolución de las ecuaciones cuadráticas. Así es, por ejemplo, la ecuación de tercer grado:

$$ax^3+bx^2+cx=0,$$

que posee una raíz $x=0$ y que luego de simplificar por x se transforma en la ecuación cuadrática:

$$ax^2+bx+c=0.$$

La ecuación de cuarto grado, llamada también *bicuadrática:*

$$ay^4+by^2+c=0$$

también se reduce a una ecuación cuadrática; para ello es suficiente sustituir en esta ecuación

$$y^2 = x,$$

hallar las raíces de la ecuación cuadrática que se ha obtenido y luego extraer las raíces cuadradas de las mismas.

Subrayamos nuevamente que éstas son sólo ciertos casos muy particulares de las ecuaciones de tercero y cuarto grado. En el álgebra que se estudia en la escuela media no se da ningún método para la resolución de ecuaciones arbitrarias de estos grados y menos aún para la resolución de ecuaciones arbitrarias de grados superiores. Sin embargo, en diferentes cuestiones de la técnica, la mecánica y la física con frecuencia tenemos que habérnoslas con ecuaciones algebraicas de grados muy altos. La teoría de las ecuaciones algebraicas de n-ésimo grado arbitrario, donde n es un número entero positivo, fue elaborada en el transcurso de varios siglos, constituyendo hoy una de las partes fundamentales del curso de *álgebra superior* que se estudia en las universidades e institutos pedagógicos.

§ 2. NUMEROS COMPLEJOS

La teoría de las ecuaciones algebraicas se asienta, fundamentalmente, en la teoría de los números complejos, cuyos fundamentos se estudian en el último grado de la escuela media. Sin embargo, con frecuencia el alumno queda con dudas acerca de la validez de estos números, de su real existencia. Cuando hace varios siglos los números complejos comenzaron a introducirse en la práctica matemática, los científicos también tuvieron dudas similares, lo que se vio reflejado en la denominación, que desde entonces se conserva, de «números imaginarios». Sin embargo, para la ciencia contemporánea ya no hay nada misterioso en los números complejos, siendo éstos tan poco «imaginarios» como los números negativos o los irracionales.

La necesidad en los números complejos apareció en relación con el hecho de que dentro del cuerpo de los números reales no es posible extraer la raíz cuadrada de un número

real negativo. Como sabemos esto conduce a que ciertas ecuaciones cuadráticas no posean raíces reales; la ecuación

$$x^2+1=0$$

es la más simple de todas ellas. ¿No sería posible ampliar la reserva de números de modo tal que estas ecuaciones también tengan raíces?

El alumno se encontró varias veces con el enriquecimiento de esa reserva de números de que ya disponía. Comenzó con el estudio de los *números enteros positivos* en la aritmética elemental. Muy pronto aparecieron también los *quebrados*. En el curso de álgebra se agregaron los números negativos, es decir, se completó el sistema de todos los *números racionales*. Finalmente, la introducción de los números irracionales llevó al sistema de todos los números *reales* (o *naturales*).

Cada una de estas ampliaciones sucesivas de la reserva de números permitió hallar raíces para algunas de aquellas ecuaciones que antes de esta ampliación carecían de raíces. Así, la ecuación

$$2x-1=0$$

tuvo raíz sólo después de la introducción de los quebrados; la ecuación

$$x+1=0,$$

sólo después de la introducción de los números negativos y la ecuación

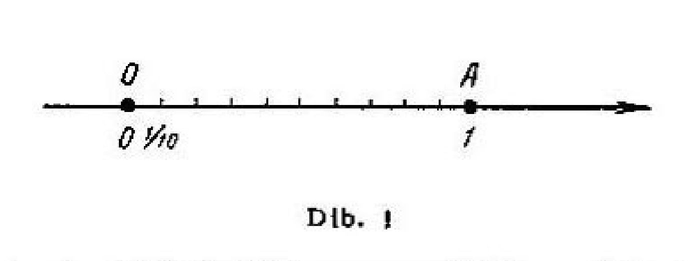
$$x^2-2=0,$$

sólo luego del agregado de los números irracionales.

Todo esto justifica otro paso más en el camino hacia el enriquecimiento de la reserva de números por lo que ahora indicaremos, a rasgos generales, cómo se lleva a cabo este último paso.

Como se sabe, si se han dado una línea recta y en ella la dirección positiva, si en ella se ha señalado además el punto O y elegido la unidad de escala (dib. 1), entonces, a cualquier punto A de esta recta le puede ser puesto en correspondencia su *coordenada*, es decir, el número real que expresa, en las unidades de escala elegidas, la distancia desde A hasta O, si A está a la derecha del punto O ó la distancia tomada con el signo negativo si A se halla a la iz-

quierda de O. De esta forma, a todos los puntos de la recta les están puestos en correspondencia diferentes números reales, pudiendo además demostrarse que de este modo serán empleados todos los números reales. Por consiguiente, se puede considerar que los puntos de nuestra recta son las representaciones de sus correspondientes números reales,



Dib. 1

o sea, que es como si estos números estuvieran contenidos en la línea recta. Denominaremos a ésta *recta numérica* (o eje numérico).

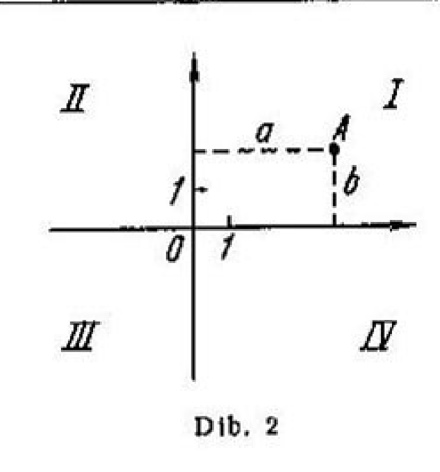
¿Se puede ampliar la reserva de números de modo tal que los nuevos números estén representados en la misma forma natural por puntos en el plano? Como aún no tenemos un sistema de números más amplio que el sistema de los números reales debemos construirlo.

Corresponde comenzar esta construcción indicando de qué «material» «se construirá» el nuevo sistema de números, es decir, qué objetos harán las veces de nuevos números; después, determinar cómo sobre dichos objetos, es decir, sobre estos futuros números deberán efectuarse las operaciones algebraicas: suma, producto, resta y división. Como nosotros queremos construir números tales que se representen por todos los puntos del plano, entonces lo más sencillo de todo es tomar a los mismos puntos del plano en calidad de nuevos números. Para que estos puntos puedan ser verdaderamente considerados números sólo corresponde definir cómo se realizarán con ellos las operaciones algebraicas, es decir, qué punto debe llamarse suma de dos puntos dados del plano, qué punto debe llamarse producto de éstos, etc.

La posición de un punto en la recta es totalmente definida por un número real, o sea, por su coordenada, análogamente, la posición de todo punto en el plano puede determinarse mediante un par de números reales. Para esto tomemos en el plano dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan

en el punto O y en cada una de las cuales damos el sentido positivo y señalamos la unidad de escala (dib. 2). Denominemos a estas rectas *ejes de coordenadas*; en particular, *eje de las abscisas* a la recta horizontal y *eje de las ordenadas* a la recta vertical. Todo el plano queda dividido por los ejes de coordenadas en cuatro cuadrantes, que se numeran del modo indicado en el dibujo.

La posición de cualquier punto A del primer cuadrante (véase el dib. 2) queda determinada totalmente dando dos



Dib. 2

números reales positivos: el número a, que en las unidades de escala elegidas expresa la distancia desde este punto hasta el eje de las ordenadas (la *abscisa* del punto A) y el número b, que en las unidades de escala elegidas expresa su distancia hasta el eje de las abscisas (la *ordenada* del punto A).

Recíprocamente, para cada par (a, b) de números reales positivos puede señalarse en el primer cuadrante un punto totalmente definido, cuya abscisa sea a y su ordenada b. En forma análoga se determinan los puntos en los otros cuadrantes. No obstante, para asegurar la correspondencia biunívoca entre todos los puntos del plano y los pares de sus *coordenadas* (a, b), es decir, para evitar que a varios puntos diferentes del plano les corresponda un mismo par de coordenadas (a, b), consideraremos negativas a las abscisas de los puntos que se encuentran en los cuadrantes *II* y *III* y a las ordenadas de los puntos que se encuentran en los cuadrantes *III* y *IV*. Señalemos que los puntos que se encuentran en el eje de las abscisas tienen coordenadas tipo $(a, 0)$, en tanto que los puntos que se encuentran en el eje

de las ordenadas tienen coordenadas tipo $(0, b)$, donde a y b son ciertos números reales.

Aprendimos a dar todos los puntos del plano mediante pares de números reales. Esto nos permitirá, en lo sucesivo, referirnos no ya al punto A, dado por las coordenadas (a, b) sino simplemente al punto (a, b).

Definiremos ahora la suma y el producto de los puntos del plano. Al principio, estas definiciones nos parecerán muy artificiales, pero se puede demostrar que estas definiciones son las únicas que nos permitirán alcanzar nuestro objetivo, ya que con ellas aparece la posibilidad de extraer raíces cuadradas de los números reales negativos.

Sean dados en el plano los puntos (a, b) y (c, d). Hasta ahora no sabíamos qué correspondía entender como suma y producto de estos puntos. Llamemos ahora *suma* de los mismos al punto con abscisa $a+c$ y ordenada $b+d$, es decir,

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d).$$

Llamemos, por otra parte, *producto* de los puntos dados al punto con abscisa $ac-bd$ y ordenada $ad+bc$, es decir,

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$$

Es fácil comprobar que las operaciones con el conjunto de todos los puntos del plano las cuales hemos definido, poseen todas las propiedades comunes a las operaciones con los números: la suma y el producto de los puntos del plano son conmutativas, o permutables (es decir, pueden permutarse sumandos y factores); asociativas, o combinables (es decir, la suma y el producto de tres puntos no dependen de la disposición de los paréntesis) y están ligadas por la ley distributiva (es decir, por la regla de apertura de paréntesis). Señalemos que el hecho de que la suma y el producto de los puntos son asociativos permite introducir de modo unívoco la suma y el producto de cualquier número finito del plano.

Para los puntos del plano también se cumplen ahora la resta y la división, inversas, respectivamente, a la suma y al producto; inversas en el sentido de que en cualquier sistema de números la diferencia de dos puntos puede determinarse como el número cuya suma con el sustraendo es igual al minuendo, en tanto que el cociente de dos números es el número cuya multiplicación por el divisor es igual al dividendo.

Precisamente:

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d),$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

El lector comprobará sin dificultad que el producto del punto que se halla en el segundo miembro de la última igualdad por el punto (c, d) (el producto se entiende, por supuesto, en el sentido de la definición que antes diéramos) es en realidad igual al punto (a, b). Más sencillo aún es comprobar que la suma del punto que se encuentra en el segundo miembro de la primera igualdad y del punto (c, d) es en realidad igual al punto (a, b).

Aplicando nuestras definiciones a los puntos que se encuentran en el eje de las abscisas, es decir, a los puntos tipo $(a, 0)$, obtenemos

$$(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0),$$

$$(a, 0)\ (b, 0)=(ab, 0),$$

es decir, la suma y el producto de estos puntos se reducen a la suma y al producto de sus abscisas. Esto es válido también para la resta y la división:

$$(a, 0)-(b, 0)=(a-b, 0),$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)}=\left(\frac{a}{b}, 0\right).$$

Si tomamos en consideración que todo punto $(a, 0)$ del eje de las abscisas es la representación del número real a, su abscisa, es decir, si identificamos el punto $(a, 0)$ con el mismo número a, entonces el eje de las abscisas se transforma simplemente en la recta de los números reales (eje numérico). Ahora podemos considerar que el nuevo sistema de números que hemos construido con los puntos del plano contiene, en particular, todos los números reales, más exactamente, los contiene en calidad de puntos del eje de las abscisas.

Los puntos del eje de las ordenadas no pueden ser identificados con números reales. Veamos, por ejemplo, el punto $(0, 1)$, que se encuentra en el eje de las ordenadas a la distancia de 1 por encima del punto O. Designemos este punto por la letra i:

$$i=(0, 1)$$

y hallemos su cuadrado, en el sentido del producto de los puntos del plano:

$$i^2=(0,\ 1)(0,\ 1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,\ 0).$$

El punto $(-1,\ 0)$ se encuentra no en el eje de las ordenadas sino en el eje de las abscisas y por ello representa al número real -1, es decir,

$$i^2=-1.$$

Por consiguiente, en nuestro nuevo sistema de números nosotros hallamos un número tal que su cuadrado es igual número real -1, es decir, que ahora ya podemos extraer la raíz cuadrada de -1. Otro valor de esta raíz será el punto $-i=(0,\ -1)$. Señalemos que el punto $(0,\ 1)$, designado por nosotros mediante i, es un punto totalmente definido del plano y el hecho de que se le denomine «unidad imaginaria» no obstaculiza su existencia real en el plano.

El sistema de números que hemos construido, más amplio que el sistema de los números reales, se denomina sistema de los *números complejos*, mientras que los puntos del plano con las operaciones antes definidas en ellos reciben el nombre de *números complejos*. Es fácil demostrar, empleando estas operaciones, que todo número complejo puede ser expresado mediante números reales y el número i. Sea dado el punto $(a,\ b)$. En virtud de la definición de suma es válida la igualdad

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b).$$

El sumando $(a,\ 0)$ se encuentra en el eje de las abscisas y es por lo tanto el número real a. El segundo sumando, gracias a la definición del producto, puede escribirse en la forma:

$$(0,\ b)=(b,\ 0)(0,\ 1).$$

El primer factor del segundo miembro de esta igualdad coincide con el número real b y el segundo es igual a i. De este modo

$$(a,\ b)=a+bi,$$

donde la suma y la miltiplicación deben entenderse en el sentido de las operaciones con los puntos del plano.

Habiendo obtenido la expresión ordinaria de los números complejos, ahora ya podemos escribir las fórmulas antes dadas

para las operaciones con los números complejos en la forma siguiente:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Señalemos que la definición del producto de los puntos del plano que diéramos antes se halla en correspondencia total con la ley distributiva: si en el primer miembro de la segunda igualdad escrita más arriba, hallamos el producto por la regla de la multiplicación de un binomio por otro, que se infiere de la ley distributiva, luego empleamos la igualdad $i^2=-1$ y simplificamos los términos semejantes obtendremos precisamente el segundo miembro de esa igualdad.

§ 3. EXTRACCIÓN DE RAÍCES. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Teniendo a nuestra disposición los números complejos podemos extraer la raíz no sólo del número -1 sino también de cualquier número real negativo, además, obtendremos dos valores diferentes. Precisamente, si $-a$ es un número real negativo, es decir, $a>0$ entonces

$$\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}i,$$

donde $\sqrt{a}$ es el valor positivo de la raíz cuadrada del número positivo a.

Volviendo a la resolución de la ecuación cuadrática con coeficientes reales a que nos refiriéramos en la introducción, ahora podemos decir que en el caso $b^2-4ac<0$ esta ecuación posee dos raíces diferentes, pero complejas.

Los números complejos son suficientes para extraer la raíz cuadrada no sólo de los números reales sino también de cualesquiera números complejos. Sea dado el número complejo

$a+bi$, entonces

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}+i\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\,.$$

donde las dos veces se toma el valor positivo del radical $\sqrt{a^2+b^2}$. El lector ve, por supuesto, que para cualesquiera a y b tanto el primer sumando del segundo miembro como el coeficiente de i serán números reales. Cada uno de estos dos radicales tiene dos valores que se combinan uno con otro según la siguiente regla: si $b>0$ entonces el valor positivo de un radical se suma con el valor positivo del otro y el negativo con el negativo; si $b<0$ entonces el valor positivo de un radical se suma con el valor negativo del otro.

Ejemplo. Extraer la raíz cuadrada del número $21-20i$. Aquí

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(21+29)}=\pm 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(-21+29)}=\pm 2.$$

Como $b=-20$, es decir, $b<0$, la combinación de los valores de los últimos radicales se efectúa con signos diferentes, es decir,

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i).$$

Al aprender a sacar la raíz cuadrada de los números complejos obtenemos la posibilidad de resolver ecuaciones cuadráticas con cualesquiera coeficientes complejos. En efecto, la deducción de la fórmula para la resolución de la ecuación cuadrática conserva su validez para el caso de coeficientes complejos y el cálculo de la raíz cuadrada que entra en esa fórmula puede reducirse a la extracción de las raíces cuadradas de dos números reales positivos. La ecuación cuadrática con cualesquiera coeficientes complejos posee, por consiguiente, dos raíces, las cuales pueden casualmente coincidir, o sea, dar una raíz múltiple.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$x^2-(4-i)x+(5-5i)=0.$$

Aplicando la fórmula obtenemos que

$$x=\frac{(4-i)\pm\sqrt{(4-i)^2-4(5-5i)}}{2}=\frac{(4-i)\pm\sqrt{-5+12i}}{2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada presente en esta fórmula por el método antes descripto hallamos que

$$\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i),$$

de donde

$$x=\frac{(4-i)\pm(2+3i)}{2}.$$

Por lo tanto, las raíces de nuestra ecuación serán los números

$$x_1=3+i,\ x_2=1-2i.$$

Una sencilla comprobación demuestra que cada uno de estos números realmente satisface la ecuación.

Pasemos al problema relacionado con la extracción de raíces de cualquier grado entero positivo n de números complejos. Puede demostrarse que para cualquier número complejo α existen exactamente n números complejos distintos tales que cada uno de ellos, siendo elevado a la n-ésima potencia (es decir, si se toma el producto de n factores iguales a este número), da el número α. En otras palabras, se cumple el importantísimo teorema:

La raíz n-ésima de cualquier número complejo posee exactamente n valores complejos distintos.

Este teorema también es válido para los números reales, ya que éstos son un caso particular de los números complejos: la raíz n-ésima del numero real a posee exactamente n valores diferentes, en el caso general, complejos; como se sabe, entre éstos puede haber dos reales, uno o ninguno real, dependiendo esto del signo del número a y de la paridad del número n.

Así, la raíz cúbica de uno posee tres valores:

$$1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ y }\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

es de fácil comprobación que cada uno de estos números, elevado al cubo, es igual a uno. La raíz a la cuarta de la unidad tiene cuatro valores que son:

$$1,\ -1,\quad i\ \text{y}\ -i.$$

Antes presentamos la fórmula para la extracción de la raíz cuadrada del número complejo $a+bi$. Esta fórmula reduce la extracción de esa raíz a la extracción de las raíces cuadradas de dos números reales positivos. Lamentablemente, para $n>2$ no existe una fórmula que exprese la raíz n-ésima del número complejo $a+bi$ mediante valores reales de los radicales de números reales auxiliares. Es más, se ha demostrado que esa fórmula no puede ser obtenida. Las raíces n-ésimas de los números complejos se extraen habitualmente por medio del paso a un nuevo tipo de notación de estos números, la así llamada forma triginométrica, a la que nosotros no nos referiremos aquí.

§ 4. ECUACIONES CÚBICAS

Conocemos ya la fórmula para la resolución de las ecuaciones cuadráticas, además, esta fórmula es válida incluso en el caso de los coeficientes complejos. En el caso de las ecuaciones de tercer grado, o como se dice, ecuaciones cúbicas, también puede darse una fórmula, claro que más complicada, que exprese las raíces de estas ecuaciones mediante sus coeficientes, con ayuda de radicales; esta fórmula también es válida para las ecuaciones con cualesquiera coeficientes complejos.

Sea dada la ecuación

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Transformemos esta ecuación, considerando a

$$x=y-\frac{a}{3},$$

donde y es una nueva incógnita. Sustituyendo esta expresión de x en nuestra ecuación obtenemos una ecuación cúbica para la incógnita y, más sencilla, por otra parte, ya que el coeficiente de y^2 resulta igual a cero. El coeficiente de y a la primera potencia y el término independiente serán correspondientemente los números

$$p=-\frac{a^2}{3}+b, \quad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c,$$

es decir que la ecuación en forma reducida se escriba como sigue:

$$y^3+py+q=0.$$

Si hallamos las raíces de esta nueva ecuación, entonces, restándoles $\frac{a}{3}$ cada una de ellas obtendremos las raíces de la ecuación inicial.

Las raíces de nuestra nueva ecuación se expresan por medio de sus coeficientes con ayuda de la siguiente fórmula:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Cada uno de los radicales cúbicos presentes en ella posee, como sabemos, tres valores, no pudiéndoselos, sin embargo, combinar en forma arbitraria. Resulta que para cada valor del primer radical existe un único valor del segundo radical, ya que el producto de ambos es igual al número $-\frac{p}{3}$. Estos dos valores de los radicales son precisamente los que deben sumarse para obtener la raíz de nuestra ecuación. Obtenemos de este modo tres raíces de nuestra ecuación. Por consiguiente, toda ecuación cúbica con cualesquiera coeficientes numéricos posee tres raíces que, en el caso general, son complejas; por supuesto, algunas de estas raíces pueden coincidir, es decir, transformarse en raíz múltiple.

El significado práctico de la fórmula reducida no es grande. En efecto, sean los coeficientes p y q números reales. Se puede demostrar que si la ecuación

$$y^3+py+q=0$$

posee tres raíces reales diferentes, entonces la expresión

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

será negativa. Esta expresión aparece en la fórmula bajo el signo de la raíz cuadrada y por eso luego de extraer esta raíz obtenemos bajo el signo de cada una de las raíces cúbicas un número complejo. Como antes se dijera, la extracción de la raíz cúbica de un número complejo exige, sin embargo, expresar éste en la forma trigonométrica y esto sólo puede hacerse en forma aproximada y con ayuda de tablas.

Ejemplo. La ecuación

$$x^3-19x+30=0$$

no contiene el cuadrado de la incógnita y por lo tanto aplicaremos la fórmula que diéramos, sin realizar la transformación preliminar. Aquí

$$p=-19, \ q=30,$$

por consiguiente,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27},$$

es decir, es negativo. El primer radical cúbico que entra en la fórmula tiene la forma

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-15+\sqrt{-\frac{784}{27}}}=$$
$$=\sqrt[3]{-15+i\sqrt{\frac{784}{27}}}.$$

No podemos expresar este radical cúbico mediante radicales de números reales y, por lo tanto, no podemos hallar las raíces de nuestra ecuación por la fórmula dada. En realidad, como demuestra la comprobación directa, estas raíces son los números enteros 2, 3 y —5.

La fórmula dada para la resolución de la ecuación cúbica permite hallar las raíces de la ecuación sólo en aquellos casos cuando la expresión $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ es positiva o igual a cero. En el primer caso la ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas; en el segundo caso todas las raíces son reales pero una de ellas es múltiple.

Ejemplo. Resolver la ecuación cúbica

$$x^3-9x^2+36x-80=0.$$

Tomando

$$x=y+3$$

obtenemos la ecuación «reducida»:

$$y^3+9y-26=0$$

que puede resolverse aplicando la fórmula dada. Aquí

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=196=14^2,$$

y por lo tanto

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{13+14}=\sqrt[3]{27}.$$

Uno de los valores de este radical cúbico es el número 3. El producto de este valor por el valor correspondiente del segundo radical cúbico que entra en la fórmula debe ser igual al número $-\frac{p}{3}$, o sea, en nuestro caso, igual a -3. El valor buscado del segundo radical será, por consiguiente, el número -1 y por ello una de las raíces de la ecuación reducida será:

$$y_1=3+(-1)=2.$$

Ahora que obtuvimos una de las raíces de la ecuación cúbica las otras dos pueden hallarse por muchos medios diferentes. Por ejemplo pueden hallarse otros dos valores del radical $\sqrt[3]{27}$, calcular los valores correspondientes del segundo radical y sumar los valores correspondientes de los dos radicales. Se puede actuar de otra forma, dividiendo al primer miembro de la ecuación reducida por $y-2$, luego de lo cual sólo debe resolverse la ecuación cuadrática. Cualquiera de estos medios demostrará que las otras dos raíces de nuestra ecuación reducida son

$$-1+i\sqrt{12} \text{ y } -1-i\sqrt{12}.$$

En consecuencia, las raíces de la ecuación cúbica inicial son

$$5,\ 2+i\sqrt{12} \text{ y } 2-i\sqrt{12}.$$

Se comprende que no siempre los radicales se resuelven con tanta facilidad como en el ejemplo que hemos presentado y que ha sido especialmente elegido sino que con mayor frecuencia se los debe resolver en forma aproximada, obteniéndose por ello sólo valores aproximados para las raíces de la ecuación.

§ 5. ACERCA DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BAJO RADICALES Y DE LA EXISTENCIA DE RAÍCES DE LAS ECUACIONES

Para las ecuaciones de cuarto grado también puede indicarse una fórmula que expresa las raíces de estas ecuaciones mediante sus coeficientes. Esta fórmula es mucho más complicada que la fórmula para resolver la ecuación cúbica ya que contiene radicales más complicados «de muchos pisos» y por ello su aplicación práctica resulta mucho menor. De esta fórmula puede deducirse, sin embargo, que toda ecuación de cuarto grado con coeficientes numéricos arbitrarios posee cuatro raíces complejas, algunas de las que pueden ser reales.

Las fórmulas para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado fueron descubiertas ya en el siglo XVI. Al mismo tiempo comenzaron las búsquedas de fórmulas para la resolución de las ecuaciones de quinto grado y de grados superiores. Señalemos que la forma general de una ecuación de n-ésimo grado (donde n es cierto número entero positivo) es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Estas búsquedas continuaron sin éxito hasta comienzos del siglo XIX, cuando por fin fue demostrado el siguiente resultado extraordinario:

Para ningún n, mayor o igual a cinco puede hallarse fórmula que exprese las raíces de cualquiera ecuación de n-ésimo grado mediante sus coeficientes por radicales.

Más aún, para cualquier n mayor o igual a cinco se puede indicar una ecuación de n-ésimo grado con coeficientes *enteros*, cuyas raíces no pueden expresarse mediante radicales «de muchos pisos» cualquiera que sea la combinación de los radicales, si como expresiones subradicales sólo es emplean números enteros y fracciones. Tal es, por ejemplo, la ecuación

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Puede demostrarse que esta ecuación tiene cinco raíces, tres reales y dos complejas, pero ninguna de ellas puede expresarse mediante radicales, es decir, esta ecuación es *«irresoluble por radicales»*. De este modo la reserva de números, reales

o complejos que son raíces de las ecuaciones con coeficientes enteros (estos números se denominan *algebraicos* en contraposición a los números *trascendentes* que no son raíces de ninguna ecuación con coeficientes enteros), es mucho más amplia que la reserva de números que se expresan por radicales.

La teoría de los números algebraicos es una rama importantísima del álgebra a cuyo enriquecimiento contribuyeron los matemáticos rusos E. I. Zolotariov (1847—1878); C. F. Voronoi (1868—1908), N. G. Chebotariov (1894—1947).

La inexistencia de fórmulas generales para la resolución por radicales de las ecuaciones de n-ésimo grado cuando $n \geqslant 5$ fue demostrada por *Abel* (1802—1829). La existencia de ecuaciones con coeficientes enteros irresolubles por radicales fue establecida por Galois (1811—1832), quien también halló las condiciones en las cuales la ecuación puede resolverse por radicales. Todos estos resultados exigieron la creación de una nueva y profunda teoría, la *teoría de grupos*. El concepto de grupo permitió agotar la cuestión referente a la resolución de ecuaciones por radicales, habiendo hallado más tarde numerosas aplicaciones en diferentes ramas de la matemática y fuera de sus límites, convirtiéndose en uno de los objetos más importantes de estudio en el álgebra. Sin entrar a definir ahora este concepto señalemos que el papel dirigente en el desarrollo de la teoría de grupos pertenece en la actualidad a los algebristas soviéticos.

El hecho de que no existen fórmulas para resolver las ecuaciones de n-ésimo grado cuando $n \geqslant 5$ no provoca dificultades serias en lo que respecta a la búsqueda práctica de las raíces de las ecuaciones. Esto se compensa totalmente por los numerosos métodos de resolución aproximada de las ecuaciones, que incluso en el caso de las ecuaciones cúbicas conducen al objetivo con mayor rapidez que utilizando la fórmula (allí donde ésta puede aplicarse) y extrayendo, a continuación, en forma aproximada los radicales reales. No obstante, la existencia de fórmulas para las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados permitió demostrar que estas ecuaciones poseen respectivamente dos, tres o cuatro raíces. Ahora bien, ¿cómo estarán las cosas respecto a la existencia de raíces para las ecuaciones de n-ésimo grado para n arbitrario?

Si existieran ecuaciones con coeficientes numéricos reales o complejos que no poseyeran ni una sola raíz real o compleja,

aparecería entonces la necesidad de ulterior ampliación de la reserva de números. Pero, esto no es necesario: ya que los números complejos son suficientes para resolver cualesquiera ecuaciones con coeficientes numéricos. Es válido precisamente el siguiente teorema:

Toda ecuación de n-ésimo grado con cualesquiera coeficientes numéricos tiene n raíces complejas o, en particular, reales, algunas de las cuales, por supuesto, pueden coincidir o sea que pueden ser múltiples.

Este es el llamado *teorema fundamental del álgebra superior*, que fuera demostrado ya en el siglo XVIII por D'Alembert (1717—1783) y Gauss (1777—1855), aunque sólo en el siglo XIX fue lograda su rigurosa demostración (en la actualidad existen varias decenas de demostraciones diferentes). El concepto de multiplicidad de la raíz citado en el enunciado del teorema fundamental tiene el siguiente significado. Se puede demostrar que si la ecuación de n-ésimo grado

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

tiene n raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, entonces el primer miembro de la igualdad posee la siguiente descomposición en factores:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Recíprocamente, si para el primer miembro de nuestra ecuación se da esa descomposición, entonces los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ serán las raíces de esa ecuación. Algunos de los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pueden resultar iguales entre sí. Si por ejemplo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k,$$

pero

$$\alpha_1 \neq \alpha_l \text{ cuando } l = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n,$$

o sea, en la descomposición estudiada el factor $(x-\alpha_1)$ en realidad se encuentra k veces, entonces para $k>1$ la raíz α_1 se llama raíz *múltiple*, o más exactamente *k-múltiple* *).

*) Si $k=1$ se dice raíz simple (*N. del Tr.*)

§ 6. NÚMERO DE RAÍCES REALES

El teorema fundamental de álgebra superior encuentra aplicaciones importantísimas en muchas investigaciones teóricas pero no da ningún método determinado para calcular en la práctica las raíces de las ecuaciones. Sin embargo, en muchos problemas de la técnica se encuentran ecuaciones, por regla general, con coeficientes reales acerca de cuyas raíces sólo es necesario poseer cierta información. Por lo común no es necesario conocer estas raíces con exactitud ya que los mismos coeficientes de la ecuación han sido obtenidos como resultado de mediciones y por ello se conocen sólo con cierta aproximación, que depende de la exactitud de aquéllas.

Sea dada la ecuación de n-ésimo grado

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

con coeficientes reales. Como sabemos ella tiene n raíces. Las primeras preguntas que naturalmente aparecen son: ¿Existen entre éstas raíces reales? ¿cuántas? ¿dónde están ubicadas aproximadamente? La respuesta a estas preguntas puede ser obtenida del modo que a continuación explicaremos. Designemos con $f(x)$ al polinomio del primer miembro de nuestra ecuación, es decir:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

El lector, que conoce el concepto de función, comprenderá que nosotros consideramos al primer miembro de la ecuación como función de la variable x. Dando a x un valor numérico arbitrario α y sustituyéndolo en la expresión para $f(x)$, una vez efectuadas todas las operaciones indicadas obtendremos un cierto número que se denomina *valor* del polinomio $f(x)$ y se designa con la notacion $f(\alpha)$. Si

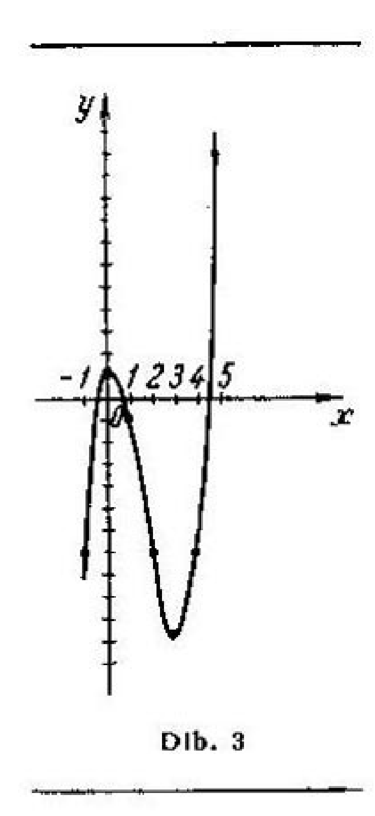
$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

y $\alpha=2$, entonces

$$f(2)=2^3+5\cdot 2^2+2\cdot 2+1=-7.$$

Tracemos la *gráfica* del polinomio $f(x)$. Para esto tomemos en el plano los ejes de coordenadas (véase más arriba) y, dando a x cierto valor α y calculando el valor correspondiente $f(\alpha)$ del polinomio $f(x)$, señalemos en el plano el punto con

abscisa α y ordenada $f(\alpha)$, o sea, el punto $(\alpha, f(\alpha))$. Si pudiéramos proceder de este mismo modo para todos los α entonces los puntos señalados por nosotros en el plano compondrían una cierta línea curva. Los puntos de intersección o tangencia de esta curva con el eje de las abscisas indican



Dib. 3

valores de α para los cuales $f(\alpha)=0$, o sea, que indican cuáles son las raíces reales de la ecuación dada.

Lamentablemente, hallar los puntos $(\alpha, f(\alpha))$ para todos los valores α es imposible ya que su número es infinitamente grande y nos vemos obligados a limitarnos a un número finito de estos puntos. Para que resulte más sencillo, en principio podemos tomar varios valores de α consecutivos, positivos y negativos, señalar en el plano los puntos correspondientes y luego unirlos mediante una línea curva tan suave como sea posible. Para esto resulta suficiente tomar sólo aquellos valores de α que están comprendidos entre $-B$ y B, donde la cota B se determina del modo siguiente: si $|a_0|$ es el valor absóluto del coeficiente de x^n (recordemos que $|a|=a$ si $a>0$ y $|a|=-a$ si $a<0$), A es la mayor de las magnitudes absolutas de todos los demás coeficientes a_i,

$a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, entonces

$$B = \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

No obstante estas cotas suelen ser demasiado amplias.

Ejemplo. Trazar la gráfica del polinomio

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1.$$

Aquí $|a_0| = 1$, $A = 5$ y por lo tanto $B = 6$. En este ejemplo, en realidad, es posible limitarse sólo a aquellos valores α que están comprendidos entre -1 y 5. Hacemos la tabla de valores del polinomio $f(x)$ y tracemos la gráfica (dib. 3).

α	$f(\alpha)$
-1	-7
0	1
1	-1
2	-7
3	-11
4	-7
5	11

La gráfica muestra que las tres raíces α_1, α_2 y α_3 de nuestra ecuación son reales y que están comprendidas entre los límites:

$$-1 < \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 4 < \alpha_3 < 5.$$

Vemos que podía no haberse construido la gráfica ya que sus intersecciones con el eje de las abscisas están ubicadas entre tales valores próximos de α para los que $f(\alpha)$ tienen signos distintos y por ello hubiera sido suficiente mirar la tabla de valores de $f(\alpha)$.

Si en nuestro ejemplo hubiésemos encontrado menos de tres puntos de intersección podrían aparecer dudas acerca de si, debido a lo imperfecto de nuestro trazado, no hemos perdido algunas raíces más, ya que trazamos la línea curva conociendo solamente siete de sus puntos. No obstante, existen métodos que permiten conocer exactamente el número de raíces reales de la ecuación e incluso la cantidad de

raíces comprendidas entre dos números arbitrarios a y b, donde $a<b$. Pero nosotros no expondremos estos métodos.

Suelen resultar de mucha utilidad los teoremas que daremos a continuación, los que dan cierta información acerca de la existencia de raíces reales e incluso positivas.

Toda ecuación de grado impar con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz real.

Si en una ecuación con coeficientes reales, el coeficiente principal a_0 y el término independiente a_n tienen signos diferentes, entonces la ecuación tiene por lo menos una raíz positiva. Si además la ecuación es de grado par entonces también posee por lo menos una raíz negativa.

Así, la ecuación

$$x^7-8x^3+x-2=0$$

tiene por lo menos una raíz positiva, en tanto que la ecuación

$$x^6+2x^5-x^2+7x-1=0$$

posee una raíz positiva y otra negativa. Todo lo dicho puede comprobarse fácilmente mediante gráficas.

§ 7. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POR APROXIMACIÓN

Con anterioridad hallamos aquellos números enteros entre los cuales se hallan comprendidas las raíces reales de la ecuación

$$x^3-5x^2+2x+1=0.$$

Este mismo método permite hallar con mayor exactitud las raíces de esta ecuación. Sea, por ejemplo, que nos interesa la raíz α_2, comprendida entre el cero y la unidad. Calculando el valor del primer miembro de nuestra ecuación $f(x)$ cuando $x=0,1$; $0,2$; . . .; $0,9$, hallaríamos entre qué dos números de esta serie de valores de x la gráfica del polinomio $f(x)$ corta al eje de las abscisas, es decir, calcularíamos la raíz α_2 con exactitud de hasta una décima.

Continuando de este modo hubiéramos podido hallar el valor de la raíz α_2 con exactitud de hasta una centésima,

una milésima y, teóricamente, con la exactitud que nos sea necesaria. Pero este camino está ligado con cálculos muy voluminosos que se vuelven muy pronto prácticamente irrealizables. Debido a esto se han elaborado distintos métodos que permiten calcular más rápidamente los valores aproximados de las raíces reales de las ecuaciones. Expondremos el más sencillo de estos métodos, aplicándolo inmediatamente al cálculo de la raíz α_2 de la ecuación cúbica citada. En principio es conveniente hallar cotas más pequeñas (estrechas) para esta raíz que $0<\alpha_2<1$, que conocemos por ahora. Con este fin calculamos la raíz con exactitud de hasta una décima. Si el lector calcula los valores del polinomio

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

para $x=0{,}1$; $0{,}2$; . . .; $0{,}9$, hallará que

$$f(0{,}7)=0{,}293, \quad f(0{,}8)=-0{,}088,$$

y por lo tanto, como los signos de esos valores de $f(x)$ son diferentes,

$$0{,}7<\alpha_2<0{,}8.$$

El método consiste en lo siguiente. Sea dada una ecuación de n-ésimo grado a cuyo primer miembro designamos con $f(x)$ y sea conocido que entre a y b, donde $a<b$, existe una raíz real α de esta ecuación, la que no es múltiple. Si las cotas $a<\alpha<b$ son suficientemente estrechas, por ciertas fórmulas determinadas pueden entonces calcularse nuevas cotas más estrechas, c y d, para la raíz α, es decir, aquellas que determinan con mayor exactitud la posición de esa raíz; siendo que o bien $c<\alpha<d$ o bien $d<\alpha<c$.

La cota c se calcula por la fórmula

$$c=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}.$$

En nuestro ejemplo $a=0{,}7$, $b=0{,}8$ y los valores $f(a)$ y $f(b)$ han sido dados más arriba. Por ello

$$c=\frac{0{,}8\cdot 0{,}293-0{,}7\cdot(-0{,}088)}{0{,}293-(-0{,}088)}=\frac{0{,}2344+0{,}0616}{0{,}381}=0{,}7769\ldots$$

La fórmula para la cota d exige la introducción de un nuevo concepto que, para nosotros, jugará un papel secun-

dario; en realidad este concepto pertenece a otra parte de la matemática, más exactamente, al cálculo diferencial.

Sea dado un polinomio de n-ésimo grado:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.$$

El polinomio de $(n-1)$-ésimo grado:

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}\ldots$$
$$\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

se llama *derivada* del polinomio $f(x)$ y se le designa con $f'(x)$. Esta ha sido obtenida del polinomio $f(x)$ según la siguiente regla: se multiplica cada término a_kx^{n-k} del polinomio $f(x)$ por el exponente $n-k$ de x en tanto que se disminuye ese mismo exponente en la unidad; con esto el término independiente a_n desaparece, de modo que puede considerarse que $a_n=a_nx^0$.

Sacando la derivada del polinomio $f'(x)$ obtendremos un polinomio de $(n-2)$-ésimo grado que recibe el nombre de *segunda derivada* del polinomio $f(x)$ y se designa mediante $f''(x)$.

Así, para el polinomio que consideramos:

$$f(x)=x^3-5x^2+2x+1$$

será

$$f'(x)=3x^2-10x+2,$$
$$f''(x)=6x-10.$$

La cota d se calculará ahora por una de las fórmulas siguientes

$$d=a-\frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad d=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

La regla que daremos a continuación indica qué fórmula de éstas dos justamente debe elegirse. Si las cotas a, b fueron elegidas suficientemente estrechas, por lo común, la segunda derivada $f''(x)$ tendrá un mismo signo cuando $x=a$ y $x=b$, en tanto que los signos de $f(a)$ y $f(b)$ serán como sabemos, distintos. Si los signos de $f''(a)$ y $f(a)$ coinciden debe tomarse la primera fórmula para d, es decir, aquella en la cual se emplea la cota a; pero si son los signos de $f''(b)$ y $f(b)$ los que coinciden entonces debe tomarse la segunda fórmula, referida a la cota b.

En el ejemplo que viéramos, la segunda derivada $f''(x)$ es negativa ya sea cuando $a=0,7$ como cuando $b=0,8$. Por eso, como $f(a)$ es positivo y $f(b)$ es negativo, para la cota d corresponde tomar la segunda fórmula. Como

$$f'(0,8)=-4,08,$$

entonces

$$d=0,8-\frac{-0,088}{-4,08}=0,8-0,0215\ldots=0,7784\ldots$$

De este modo, para la raíz α_2 hemos encontrado las cotas siguientes, mucho más estrechas que aquellas que ya conocíamos:

$$0,7769\ldots<\alpha_2<0,7784\ldots$$

o bien, ampliando un tanto la distancia entre estas cotas:

$$0,7769<\alpha_2<0,7785.$$

De aquí se deduce que si como valor para α_2 tomamos el valor medio, es decir, la semisuma de las cotas halladas,

$$\alpha_2=0,7777,$$

el error cometido no supera al número 0,0008, que es igual a la semidiferencia de esas cotas.

Si la exactitud obtenida es insuficiente, entonces podría volver a aplicarse el método descripto a las nuevas cotas de la raíz α_2 halladas. Esto, por otra parte, hubiera exigido cálculos mucho más complejos.

Existen otros métodos de resolución de ecuaciones por aproximación, que dan mayor exactitud. Entre éstos, el más perfecto es el método propuesto por el gran matemático ruso N. I. Lobachévski (1793—1856), creador de la geometría no euclideana, y que permite calcular aproximadamente no sólo las raíces reales de la ecuación sino también las complejas.

§ 8. CUERPOS CONMUTATIVOS

La existencia de raíces de las ecuaciones algebraicas de que tratáramos antes, puede ser observada desde un punto de vista aún más general. Con este fin debe introducirse un

nuevo concepto, que es uno de los conceptos más importantes del álgebra.

Veamos, en principio, los tres sistemas de números que siguen: el conjunto de todos los números racionales, el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los números complejos. En cada uno de estos sistemas numéricos, manteniéndose dentro de los límites del mismo se pueden efectuar la suma, multiplicación, resta y división (exceptuando la división por cero). Esto los distingue del sistema de todos los números enteros, donde no siempre puede efectuarse la división (por ejemplo, el número 2 no es divisible por 5), así como también del sistema de todos los números reales positivos, donde no siempre puede efectuarse la resta.

El lector ya se ha encontrado con casos en los que las operaciones algebraicas no se efectúan con números: recordemos la suma y el producto de polinomios; también la suma de fuerzas, tan frecuente en la física. Por otra parte, cuando definimos los números complejos tuvimos que tratar de la suma y el producto de los puntos del plano.

Sea dado un conjunto P que conste de números o de objetos de naturaleza geométrica o, en general, de algunos entes, que llamaremos *elementos* de este conjunto P. Se dice que en P están definidas las operaciones de suma y multiplicación si a cada par de elementos a, b de P se pone en correspondencia, de un modo unívoco, un determinado elemento c de P, al que se llamará suma a y b:

$$c=a+b$$

y un elemento determinado d, al que se llamará *producto de a y b:*

$$d=ab.$$

El conjunto P con las operaciones de suma (o adición) y multiplicación así definidas se denomina *cuerpo conmutativo* si estas operaciones poseen las propiedades I — V siguientes:

I. Ambas operaciones son conmutativas, o sea, para cualesquiera a y b

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba.$$

II. Ambas operaciones son asociativas, o sea, para a, b y c arbitrarios

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).$$

III. La adición y la multiplicación están ligadas por la ley distributiva, es decir, para a, b y c arbitrarios

$$a(b+c)=ab+ac.$$

IV. Puede efectuarse la *resta*, es decir que para cualesquiera a y b puede hallarse en P la raíz de la ecuación

$$a+x=b$$

y sólo una.

V. Puede efectuarse la *división*, es decir, que para cualesquiera a y b, siempre y cuando a no sea igual a cero, puede hallarse en P la raíz de la ecuación

$$ax=b$$

y sólo una.

En la condición V se hace referencia al cero. Su existencia puede inferirse de las condiciones I — IV. En efecto, si a es un elemento arbitrario de P, entonces, en virtud de IV en P existe un elemento completamente determinado que satisface la ecuación

$$a+x=a$$

(aquí en calidad de b tomamos al mismo a). Este elemento puede depender de la elección del elemento a y, por esto, lo designaremos mediante 0_a, es decir

$$a+0_a=a. \tag{1}$$

Si b es otro elemento arbitrario de P, entonces nuevamente existe un elemento único 0_b tal que

$$b+0_b=b. \tag{2}$$

Si demostramos que $0_a=0_b$ para cualesquiera a y b, quedará entonces demostrada la existencia, en el conjunto P, del elemento que hace las veces de cero para todos los elementos a simultáneamente.

Sea c la raíz de la ecuación

$$a+x=b$$

que existe en virtud de la condición IV, en consecuencia,

$$a+c=b.$$

Adicionemos a ambos miembros de la igualdad (1) el elemento c, con lo cual la igualdad no se transgrede en virtud de la unicidad de la suma:

$$(a+0_a)+c=a+c.$$

El primer miembro de esta igualdad es igual a b y el segundo, en virtud de las condiciones I y II, es igual a $b+0_a$. Así,

$$b+0_a=b.$$

Haciendo la comparación con la igualdad (2) y tomando en cuenta que por IV existe una sola solución para la ecuación $b+x=b$, llegamos, por fin, a la igualdad:

$$0_a=0_b.$$

Ha quedado demostrado que en todo cuerpo conmutativo P existe el *cero*, es decir, un número 0 tal que para *todos* los a de P se satisfaga la igualdad

$$a+0=a$$

y, por lo tanto, el enunciado de la condición V ha quedado totalmente aclarado.

Tenemos ya tres ejemplos de cuerpos conmutativos: el cuerpo de los números racionales, el de los números reales y el de los números complejos, mientras que el conjunto de todos los números enteros o el de los números reales positivos no son cuerpos. Además de los tres cuerpos conmutativos citados existe una cantidad infinita de otros cuerpos conmutativos diferentes. En particular, dentro del cuerpo de los números reales o del cuerpo de los números complejos están contenidos muchos otros cuerpos conmutativos diferentes, los llamados *cuerpos numéricos*. Por otra parte, existen cuerpos conmutativos más amplios que el cuerpo de los números complejos. Los elementos de estos cuerpos conmutativos ya no serán denominados números, pero los cuerpos conmutativos se utilizan en diversas investigaciones matemáticas. Señalemos un ejemplo de este cuerpo.

Examinemos todos los polinomios posibles:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

con cualesquiera coeficientes complejos y cualquier grado; en particular, los mismos números complejos serán simplemente polinomios de grado cero. Si sumamos, restamos y multiplicamos polinomios con coeficientes complejos según las mismas reglas que conocemos para los polinomios con coeficientes reales, no tendremos aún el cuerpo conmutativo, ya que no siempre un polinomio es divisible «por entero» por otro.

Examinemos ahora el cociente de los polinomios

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

o, como se dice, las *funciones racionales* con coeficientes complejos, conviniendo además que operamos en forma análoga a como se opera con las fracciones. Más exactamente,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

cuando y sólo cuando

$$f(x)\psi(x)=g(x)\varphi(x).$$

Continuado:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\pm\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\,v(x)\pm g(x)\,u(x)}{g(x)\,v(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\,u(x)}{g(x)\,v(x)}.$$

El papel de cero lo juegan las fracciones cuyo numerador es igual a cero, es decir, las fracciones del tipo

$$\frac{0}{g(x)};$$

es evidente que todas las fracciones de este tipo son iguales entre sí. Finalmente, si la fracción $\frac{u(x)}{v(x)}$ es diferente de cero, o sea, si $u(x)\neq 0$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)}:\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)\,v(x)}{g(x)\,u(x)}.$$

Es fácil comprobar que las operaciones con las funciones racionales que hemos detallado satisfacen todas las exigencias de la definición de cuerpo conmutativo y, por lo tanto,

puede hablarse *del cuerpo de las funciones racionales* con coeficientes complejos. En este cuerpo conmutativo está contenido por completo el cuerpo de los números complejos ya que la función racional cuyo numerador y denominador son polinomios de grado cero serán simplemente un número complejo y todo número complejo puede representarse en esa forma.

Sería erróneo pensar que todo cuerpo conmutativo o está contenido en el cuerpo de los números complejos o lo contiene dentro suyo; existen otros cuerpos conmutativos y, en particular, aquellos que sólo constan de un número finito de elementos.

Siempre que se utilizan cuerpos conmutativos deben examinarse ecuaciones con coeficientes de estos cuerpos conmutativos y, por lo tanto, aparece el problema relacionado con la existencia de las raíces de esas ecuaciones. Así, en ciertos problemas de geometría encontramos ecuaciones con coeficientes del cuerpo conmutativo de las funciones racionales; las raíces de estas ecuaciones se llaman *funciones algebraicas*. El teorema fundamental del álgebra superior, que se refiere a las ecuaciones con coeficientes numéricos, no puede ser empleado en el caso de las ecuaciones con coeficientes de cuerpo conmutativo arbitrario y se sustituye por los siguientes teoremas generales.

Sea P un cierto cuerpo conmutativo y

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

una ecuación de n-ésimo grado con coeficientes de este cuerpo. Resulta que esta ecuación no puede tener ni en el mismo cuerpo conmutativo P ni en otro cuerpo más amplio, más de n raíces. Al mismo tiempo, el cuerpo conmutativo P puede ampliarse hasta un cuerpo conmutativo Q tal que nuestra ecuación tenga en él n raíces (algunas de las cuales pueden ser múltiples). Es válido incluso el siguiente teorema:

Todo cuerpo conmutativo P puede ampliarse hasta un cuerpo $\bar{P}$ tal que cualquiera ecuación con coeficientes de P e incluso cualquiera ecuación con coeficientes de $\bar{P}$ posea en $\bar{P}$ raíces y que el número de las mismas sea igual al grado de la ecuación.

El cuerpo conmutativo $\bar{P}$ a que nos referimos en el enunciado de este teorema se llama cuerpo *algebraicamente cerrado*.

El teorema fundamental del álgebra superior demuestra que el cuerpo de los números complejos pertenece a los cuerpos algebraicamente cerrados.

§ 9. CONCLUSIÓN

Nos hemos referido aquí solamente a las ecuaciones de un cierto grado con una incógnita. El origen de esta teoría se remonta al álgebra elemental, en la que luego del estudio de las ecuaciones de primer grado se pasa al estudio de las ecuaciones cuadráticas. Pero en el álgebra elemental también se dio un paso en otra dirección: luego de estudiar una ecuación de primer grado con una incógnita se pasó a considerar el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. El desarrollo posterior de esta teoría se da en el curso de álgebra superior dado en la universidad. En el mismo se estudian los métodos de resolución de cualesquiera sistemas de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas, así como también los métodos para hallar la solución de aquellos sistemas de ecuaciones de primer grado en los cuales el número de ecuaciones no es igual al número de incógnitas. La teoría de los sistemas de ecuaciones de primer grado, así como otras, que le son afines, en particular, la *teoría de matrices*, forman una rama especial del álgebra, el *álgebra lineal*; de entre todas las partes del álgebra, ésta es la principal debido a sus aplicaciones en geometría y otras ramas de las matemáticas, así como también en física y mecánica teórica.

Por otra parte, tanto la teoría de las ecuaciones algebraicas como el álgebra lineal, en gran medida, pueden ser considerados actualmente como partes acabadas de la ciencia. Las necesidades de ramas contiguas de la matemática y la física condujeron a que en el álgebra pasó a primer plano el estudio de los conjuntos en los cuales están dadas las operaciones algebraicas. Además de la *teoría de los campos*, dentro de la cual entran la teoría de los números algebraicos y la teoría de las funciones algebraicas, ahora también se desarrolla la *teoría de los anillos*. Se denomina *anillo* a un

conjunto, si en él se han definido las operaciones de suma y multiplicación y si se cumplen las condiciones I — IV de la definición de campo; así es, por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros. Antes ya nos referimos a otra rama muy importante del álgebra, la *teoría de grupos*. Se llama *grupo* a un conjunto con una operación algebraica (la multiplicación); esta operación debe ser asociativa y la división debe cumplirse sin limitaciones.

Es interesante señalar que en distintas aplicaciones se encuentran, con mucha frecuencia, operaciones algebraicas no *conmutativas* (el producto varía con la variación del orden de los factores) y, a veces, operaciones *no asociativas* (el producto de tres factores depende de la disposición de los paréntesis). Son no conmutativos, en particular, aquellos grupos que se emplean al estudiar las soluciones de las ecuaciones en radicales.

